22.03.16

$(a_\nu)_{\nu\in N}$ ακολουθία σε ένα μ.χ. (E,ρ)

ΟΡΙΣΜΟΣ

$(a_\nu)_{\nu\in N}$ βασική $\iff \left[(\forall\varepsilon>0)(\exists n)(\forall \mu,\nu \in N)\ \mu > n \text{ και } \nu>n \Rightarrow \rho(a_\mu,a_\nu)<\varepsilon\right]$

★ Αυτό δεν σημαίνει ότι θα είναι συγκλίνουσα (όπως ξέραμε στο $\mathbb{R}$)

Παράδειγμα: στον $((0,1], |\cdot|)$ μ.χ.

η $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu\in N$ είναι βασική αλλά όχι συγκλίνουσα

δηλ. είναι μη πλήρης μ.χ (θα το δούμε αργότερο)

Ένα σημείο θα λέγεται σ.σ. (σημείο συσσώρευσης) μιας ακολουθίας αν είναι όριο μιας υπακολουθίας της ακολουθίας.

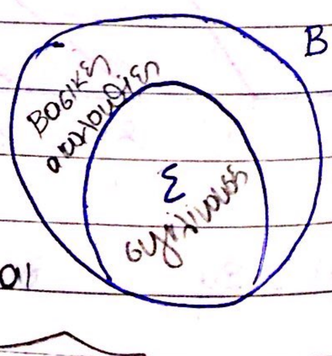
ΠΡΟΤΑΣΗ Σε κάθε μ.χ. τυχούσα συγκλίνουσα ακολουθία είναι και βασική ακολουθία ($\not\Leftarrow$)

Απόδειξη

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in N}$ με $\lim_{\nu\in N} a_\nu = \ell$

($(a_\nu)_{\nu\in N}$ στον μ.χ. (E,ρ), $\ell\in E$)

δηλ. θέλω να $\not\Leftarrow$ ταυτίζονται



$\rho(a_\varphi, a_\nu) \leq \rho(a_\varphi, \ell) + \rho(a_\nu, \ell)$ → Θέλουμε να το ευφανίσουμε.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$.
Τότε, επειδή $\lim a_\nu = \ell$, $(\exists n)(\forall \nu > n)\ \rho(a_\nu, \ell) < \varepsilon$.

Θεωρούμε δείκτες φ, ν στο $\mathbb{N}$, με $\varphi > n$ και $\nu > n$.
Τότε:

$$
\begin{aligned}
\rho(a_\varphi, a_\nu) &\leq \rho(a_\varphi, \ell) + \rho(a_\nu, \ell) \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

→ αν με ενοχλεί το 2 βάζω εδώ $\frac{\varepsilon}{2}$.

Από το παράδειγμα που είδαμε στην αρχή φαίνεται γιατί δεν ισχύει το αντίστροφο

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι βασική (→ απαραίτητη προϋπόθεση) και υπάρχει υπακολουθία $(\beta_\varphi)_{\varphi\in M}$ της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα, τότε και η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη

$\beta_\varphi = a_{k_\varphi}$, $\varphi \in M$

$\rho(a_\nu, \ell) \leq \underbrace{\rho(a_\nu, a_{k_\varphi}) + \rho(a_{k_\varphi}, \ell)}_{\text{σκέφτομαι αν μπορώ να τα φράξω}}$, (1)

Από Ανάλ. Ι ξέρω ότι αν μια υπακολουθία της (a_ν) συγκλίνει $\not\Rightarrow$ ότι η (a_ν) συγκλίνει. ΑΡΑ: (a_ν): βασική είναι απαραίτητη προϋπόθεση

Θεωρώ τυχόν $\varepsilon > 0$.
Τότε $(\exists n)\ \forall \varphi \in M, \nu \in \mathbb{N}: k_\varphi > n$ και $\nu > n \Rightarrow \rho(a_{k_\varphi}, a_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$, (*)

(επειδή η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική)

Υποθέτω $\lim\limits_{\varphi\in M} \beta_\varphi = \lim\limits_{\varphi\in M} a_{k_\varphi} = \ell$.

Τότε $(\exists \hat{n})(\forall \varphi \in M)\ k_\varphi > \hat{n} \Rightarrow \rho(a_{k_\varphi}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2}$, (*)(*)

$(1) \xrightarrow[(*)(*)]{(*)} \rho(a_\nu, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Μας αρκεί λοιπόν ΜΙΑ συγκλίνουσα υπακολουθία

Είχαμε δει: (E,ρ), $A \subseteq E$, A φραγμένο $\Leftrightarrow \delta(A) < \infty$

άρα τώρα μπορούμε να ορίσουμε τη φραγμένη ακολουθία

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 $(a_\nu)_{\nu\in N}$ φραγμένη ακολουθία $\Leftrightarrow \delta(\{a_\nu : \nu\in N\}) < \infty$.

Κατά πόσο όμως αυτός ο ορισμός είναι συμβατός μ' αυτόν που ήδη ξέρουμε;

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 $(a_\nu)_{\nu\in N}$ εν $(\mathbb{R}, |\,|)$

$(a_\nu)_{\nu\in N}$ φραγμένη $\Leftrightarrow (\exists M>0)\ |a_\nu| \leq M,\ \nu\in N$

Θ.δ.ο είναι ισοδύναμοι!

$(1)\Rightarrow(2)$: Έστω ισχύει το (1) για μια ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in N}$ στον $(\mathbb{R}, |\,|)$.

Τότε $\delta(\{a_\nu : \nu\in N\}) = \theta < \infty$. Δηλ. ισχύει

$$\sup_{(\mu,\nu)\in N^2} \rho(a_\nu, a_\mu) = \theta$$

$$\Rightarrow \sup_{(\mu,\nu)\in N^2} |a_\nu - a_\mu| = \theta$$

$$\xRightarrow{1\in N} |a_\nu - a_1| \leq \theta,\ \nu\in N$$

$$\Rightarrow |a_\nu| - |a_1| \leq \theta,\ \nu\in N$$

$$\Rightarrow |a_\nu| \leq \theta + |a_1| = M,\ \nu\in N$$

ισχύει το (2)

$(2)\Rightarrow(1)$: Έστω ισχύει το (2) για μια ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in N}$ στον $(\mathbb{R}, |\,|)$.

Για τυχόντες δείκτες μ, ν στο N έχουμε:

$$|a_\nu - a_\mu| \leq |a_\nu| + |a_\mu| \overset{(2)}{\leq} M + M = 2M$$

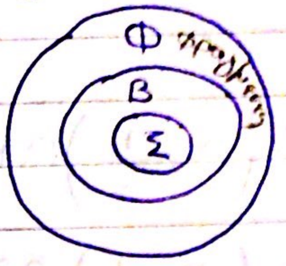
$$\Rightarrow \sup_{(\mu,\nu)\in N^2} |a_\nu - a_\mu| \leq 2M$$

$$\Rightarrow \delta(\{a_\nu : \nu\in N\}) \le 2M$$

δηλ. ισχύει το (1)

άρα ο καινούριος αριθμός περιέχει τον παλιό.

ΠΡΟΤΑΣΗ Τυχούσα βασική ακολουθία είναι και φραγμένη.



Απόδειξη

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in N}$ μια βασική ακολουθία.

Τότε για $\varepsilon = 1$: ισχύει $\forall \varepsilon$, οπότε βάζουμε $\varepsilon=1$ για να το δούμε καλύτερα.

$(\exists n)(\forall \mu,\nu$ στο $N)$ $\mu \ge n$ και $\nu \ge n \Rightarrow \rho(a_\mu,a_\nu) < 1$

$\mathbb{R} \ni r = \max\{\rho(a_\mu,a_\nu) : \mu \le n, \nu \le n\}$ → είναι πεπερασμένο και τετράγωνο

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
(1) $\mu \le n$ και $\nu \le n$
(2) $\mu \le n$ και $\nu \ge n$
(3) $\mu \ge n$ και $\nu \le n$
(4) $\mu \ge n$ και $\nu \ge n$

Για την (1): $\rho(a_\mu,a_\nu) \le r < r+1$

Για την (2): $\rho(a_\mu,a_\nu) \le \underbrace{\rho(a_\mu,a_n)}_{\text{εκλέχθηκε όλων των } \mu, n} + \rho(a_n,a_\nu) \le r+1$

$n \ge n$ και $\nu \ge n$ $\Rightarrow \rho(a_n,a_\nu) < 1$

Για την (3): $\rho(a_\mu,a_\nu) \le r+1$

Για την (4): $\rho(a_\mu,a_\nu) < 1 < 1+r$

άρα σε κάθε περίπτωση : $\rho(a_\mu,a_\nu) \le 1+r$, μ,ν εν N

$$\Rightarrow \sup\{\rho(a_\mu,a_\nu) ,\ \mu,\nu \text{ στο } N\} \le r+1$$

Άρα, $(a_\nu)_{\nu\in N}$ φραγμένη.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω (E,ρ) μ.χ. και $A \subseteq E$. Τότε:
$x \in \overline{A} \iff (\exists (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στο $A) : \lim x_\nu = x$, (*)
Ικανή και αναγκαία

Ισχύει και για σημείο συσσώρευσης

Απόδειξη

$(\Longrightarrow)$

Έστω $x \in \overline{A}$. $\Rightarrow (\forall r>0)\, B(x,r)\cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow (\forall \nu\in\mathbb{N})\, B\left(x,\frac{1}{\nu}\right)\cap A \neq \emptyset$

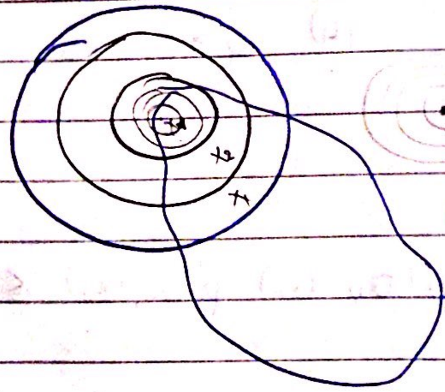
$B\left(x,\frac{1}{1}\right)\cap A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x_1 \in A) \wedge \rho(x_1,x) < \frac{1}{1}$

$B\left(x,\frac{1}{2}\right)\cap A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x_2 \in A) \wedge \rho(x_2,x) < \frac{1}{2}$

$\vdots$

$B\left(x,\frac{1}{\nu}\right)\cap A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x_\nu \in A) \wedge \rho(x_\nu,x) < \frac{1}{\nu}$

$\vdots$



άρα βρήκαμε: $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν A : $0 \leq \rho(x,x_\nu) < \frac{1}{\nu}$, με $0 \to 0$ και $\frac{1}{\nu} \to 0$

βλέπε σελ. 79-80 Παρατήρηση για τους δείκτες

$\Rightarrow \lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \rho(x_\nu,x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu = x$

δεν μας πειράζει να έχουμε $\mathbb{N}$ αντί N (ψάχνουμε απλώς μια ακολουθία)

NOTE: αν x μεμονωμένο θα παίρναμε τη σταθερή ακολουθία του x.

($\Leftarrow$)

Έστω ισχύει το (*). Θ.δ.ο. $x \in \bar{A}$.
Αρκεί ν.δ.ο. $(\forall U(x))\ U(x) \cap A \neq \phi$.

Έστω $U(x)$ τυχαία περιοχή του x.

$\xrightarrow{\lim_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu = x}$ $x_\nu \in U(x)$ τελικά
Όμως, $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο A $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x_\nu \in U(x) \cap A$ τελικά

$\Rightarrow$ $U(x) \cap A \neq \phi$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω (E, ρ) μ.χ. και $A \subseteq E$. Τότε:
A κλειστό $\Leftrightarrow$ Για κάθε ακολουθία $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του A, συγκλίνουσα (εν E) ισχύει: $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu \in A$ (*)

Απόδειξη

($\Rightarrow$)

Έστω A κλειστό, δηλ. $A = \bar{A}$

Έστω $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο A, συγκλίνουσα, δηλ. $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu = \ell$

Τότε, από την π.π. : $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu = \ell \in \bar{A}$

προηγούμενη πρόταση

αφού,

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\exists (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ στο } A)\ \lim x_\nu = x$

και αφού $A = \bar{A} \Rightarrow \lim_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu = \ell \in \bar{A} = A \Rightarrow \lim_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu \in A$

Είχαμε ότι:
A κλειστό $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Παράδειγμα για επαλήθευση των όσων ξέρουμε:
$(0,1]$, $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$

(άρα η πρόταση θα είναι σωστή)

($\Leftarrow$)

αφού πάντα $A \subseteq \bar{A}$

Έστω ισχύει το (*). Θ.δ.ο. A κλειστό, $\overbrace{\text{δηλ. } A = \bar{A}, \text{ δηλ. } \bar{A} \subseteq A}$
Έστω $x \in \bar{A} \xrightarrow{\text{π.π.}} (\exists (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ στο } A) : \lim x_\nu = x$

$\xrightarrow{(*)}$ $x \in A$